PENERAPAN KONSEP BARISAN KONVERGEN DALAM KONTEKS KERETA REL LISTRIK (KRL) RUTE BOGOR-JAKARTA KOTA

NAHDAH KHAIRUN NAJIBAH[1], **RINI MELANI**[2], **RAFIQ ZULKARNAEN**[3]

1 Universitas Singaperbangsa Karawang, nahdahkhairun@gmail.com
2 Universitas Singaperbangsa Karawang, rinimelani098@gmail.com
3 Universitas Singaperbangsa Karawang, rzulkarnaen@gmail.com

Abstrak. Barisan konvergen merupakan salah satu materi ajar dalam mata kuliah analisis real. Karakteristik materi yang deduktif-aksiomatik, formal dan abstrak menyebabkan mahasiswa merasa kesulitan dalam mempelajari materi tersebut. Makalah ini bertujuan sebagai alternatif solusi untuk mengatasi kesulitan mahasiswa dalam memahami materi barisan konvergen melalui konteks kereta rel listrik (KRL) rute Bogor-Jakarta kota. Mengacu teorema yang menyatakan bahwa "suatu barisan monoton dikatakan barisan konvergen jika dan hanya jika barisan terbatas", didapatkan hasil analisis bahwa rute KRL Bogor-Jakarta kota merupakan barisan konvergen. Konteks KRL rute Bogor-Jakarta kota dapat dianalogikan sebagai barisan konvergen, karena KRL melaju dari stasiun ke stasiun lainya atau dapat dikatakan sebagai barisan monoton naik, dan merupakan barisan terbatas dengan stasiun Bogor sebagai batas bawah dan stasiun Jakarta kota sebagai batas atas.

Kata kunci : barisan konvergen, barisan monoton, barisan terbatas.

1. Pendahuluan

Matematika merupakan bahasa simbol yang bersifat universal dan memiliki hubungan yang sangat erat dengan kehidupan nyata. Sebagaimana dikemukakan oleh Freudenthal (2002: 14), "*mathematic is human activity*". Itu artinya bahwa matematika merupakan ilmu yang bersinggungan langsung dengan aktivitas kehidupan manusia.

Barisan konvergen merupakan salah satu cakupan bahasan dalam matematika dan secara khusus merupakan salah satu materi ajar dalam mata kuliah analisis real. Karakteristik materi yang deduktif-aksiomatik, formal dan abstrak menyebabkan mahasiswa merasa kesulitan dalam memahami materi tersebut. Salah satu alternatif solusinya adalah dengan kontekstualisasi terhadap materi barisan konvergen. Kontekstualisasi adalah proses mengkaitkan materi dengan situasi dunia nyata sehingga mencipkatan pemahaman yang bermakna. Menurut Elaine B. Johnson (dalam Ani A., M Maulana, dan C Sunaengsih, [1]), Pembelajaran kontekstual dapat merangsang otak untuk menyusun hubungan pola-pola, sehingga pola-pola yang tersusun menjadi sebuah makna.

2. Metode

Penulisan ini dilakukan dengan beberapa tahapan yaitu *study literatur*, tahap membayangkan, tahap representasi, tahap menyimpulkan, dan tahap verifikasi.

1. *Study literatur*
   Mempelajari penelitian-penelitian terdahulu, buku-buku yang berhubungan dengan barisan konvergen serta artikel yang berhubungan dengan Kereta Rel Listrik (KRL).
2. Membayangkan
   Setelah mendapatkan input *visual*, tahap selanjutnya adalah membayangkan informasi penting yang telah didapat dan mengaitkan dengan suatu hal yang kita jumpai di kehidupan sehari-hari.
3. Representasi
   Setelah kita mendapatkan gambaran mental dari hasil membayangkan, tahap selanjutnya adalah representasi melalui bentuk tulisan.
4. Menyimpulkan
   Pada tahap ini dilakukan penarikan kesimpulan terhadap penganalogian konsep barisan konvergen dalam konteks kehidupan sehari-hari
5. Verifikasi
   Tahap terakhir adalah verifikasi hasil kesimpulan yang telah didapat kepada dosen yang berkompeten untuk menghindari adanya kesalahan dalam pemahaman konsep.

3. Hasil dan Pembahasan

A) Barisan

Definisi 3.1. Suatu barisan didefinisikan sebagai berikut:

$$X: N \to R$$

Artinya, suatu barisan bilangan real dapat diartikan sebagai suatu daftar bilangan real $x_1, x_2, x_3, \dots$ Lebih jelasnya, suatu barisan bilangan real merupakan suatu aturan yang mengaitkan setiap bilangan asli n dengan sebuah bilangan real tunggal x_n. Biasanya nilai dari barisan X pada n dinotasikan sebagai x_n,nilai x_n juga biasa disebut sebagai anggota atau elemen dari barisan. Barisan dapat dituliskan sebagai suatu formula untuk suku ke n. Misalnya, suatu barisan didefinisikan sebagai berikut:

$$X := \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots\right)$$

dapat kita tuliskan dalam bentuk umum:

$$X := \left(\frac{1}{2n} : n \in N\right)$$

atau secara lebih sederhana dapat kita tulis $X = \frac{1}{2n}$

Contoh 3.2.

i) Jika $b \in R$, dan $B := (b, b, b, b, \dots)$ dan semua anggota barisannya sama dengan b, maka barisan B disebut barisan konstan.

ii) Barisan bilangan 1, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ dapat kita tulis sebagai $\frac{1}{n}$

B) Barisan Terbatas

Proporsi 3.4. Himpunan $H \subseteq R$ terbatas jika dan hanya jika terdapat suatu bilangan real M sedemikian sehingga $|x| \leq M$

Definisi 3.5. Barisan x_n dikatakan terbatas (terbatas diatas atau terbatas dibawah) apabila daerah nilainya terbatas (terdapat batas atas dan batas bawah). Berdasarkan Proporsi 3.4 yang menyatakan bahwa: *Himpunan $H \subseteq R$ terbatas jika dan hanya jika terdapat suatu bilangan real M sedemikian sehingga $|x| \leq M$,* maka barisan terbatas didefinisikan sebagai:
x_n dikatakan terbatas jika dan hanya jika terdapat $M > 0$ sedemikian sehingga $|x_n| \leq M$, untuk setiap $n \in N$

Contoh 3.6.
i) Barisan $\frac{1}{n}$ adalah barisan bilangan 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, … yang merupakan barisan terbatas, karena terdapat M=1 sedemikian sehingga $|\frac{1}{n}| \leq 1$ yang artinya $-1 \leq \frac{1}{n} \leq 1$
ii) Barisan $(-1)^n$ adalah barisan bilangan -1, 1, -1, 1, … yang merupakan barisan terbatas, karena terdapat M=1 sedemikian sehingga $|(-1)^n| \leq 1$ yang artinya $-1 \leq (-1)^n \leq 1$

C) Barisan Monoton

Definisi 3.7 misalkan $X = (x_n)$ merupakan barisan bilangan real. X dikatakan monoton naik apabila:

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1}$$

Definisi 3.8 misalkan $X = (x_n)$ merupakan barisan bilangan real. X dikatakan monoton turun apabila:

$$x_1 > x_2 > \cdots > x_n > x_{n+1}$$

Definisi 3.9 barisan X dikatakan monoton apabila X monoton naik, atau X monoton turun

Contoh 3.10.
i) Barisan $a, a^2, a^3, \ldots, a^n, \ldots$ untuk $a > 1$ merupakan barisan monoton naik
ii) Barisan $b, b^2, b^3, \ldots, b^n, \ldots$ untuk $0 < b < 1$ merupakan barisan monoton turun
iii) Barisan -1, 1, -1, 1, … bukan merupakan barisan monoton

D) Barisan Konvergen

Teorema 3.11. Suatu barisan monoton dikatakan barisan konvergen jika dan hanya jika barisan tersebut juga terbatas. Artinya:

a) Jika X=(x_n) merupakan barisan monoton naik yang terbatas, maka:

$$\lim(x_n) = \sup\{x_n: n \in N\}$$

b) Jika Y=(y_n) merupakan barisan monoton turun yang terbatas, maka:

$$\lim(y_n) = \inf\{y_n: n \in N\}$$

BUKTI Misalkan X merupakan barisan monoton dn terbatas. Maka X merupakan barisan monoton naik atau barisan monoton turun. Akan dibuktikan a) $\lim(x_n) = \sup\{x_n: n \in N\}$, dan b) $\lim(y_n) = \inf\{y_n: n \in N\}$

a) Anggap bahwa X merupakan barisan terbatas, dan monoton naik. Karena X merupakan barisan terbatas, maka terdapat bilangan real M sehingga $x_n \leq M$ untuk setiap $n \in N$. Berdasarkan teorema kelengkapan, terdapat supremum $x^* = \sup\{x_n : n \in N\}$. Akan dibuktikan bahwa $x^* = \lim(x_n)$

   Jika terdapat $\varepsilon > 0$, maka $x^* - \varepsilon$ bukanlah batas atas dari himpunan $\{x_n: n \in N\}$ karena terdapat anggota dari himpunan x_K yang artinya $x^* - \varepsilon < x_K$. Fakta bahwa X merupakan barisan monoton naik mengakibatkan $x_K \leq x_n$ untuk setiap $n \geq K$, maka:

$$x^* - \varepsilon < x_K \leq x_n \leq x^* < x^* + \varepsilon \quad \text{untuk setiap } n \geq K,$$

   artinya,

$$x^* - \varepsilon < x_n < x^* + \varepsilon$$

   Selanjutnya kita dapatkan,

$$|x_n - x^*| < \varepsilon$$

   Karena $\varepsilon > 0$, jadi dapat kita simpulkan bahwa (x_n) konvergen ke x^*

b) Anggap bahwa Y merupakan barisan terbatas, dan monoton turun. Maka jelas bahwa $X := -Y = (-y_n)$. Pada bagian a) ditunjukan bahwa $\lim X = \sup\{-y_n : n \in N\}$. Kita dapatkan $\lim X = -\lim Y$, dan berdasarkan teorema kita tahu bahwa $\sup\{-y_n : n \in N\} = -\inf\{y_n : n \in N\}$

   Jadi, dapat kita simpulkan bahwa $\lim Y = -\lim X = \inf\{y_n : n \in N\}$ □

Contoh 3.12.

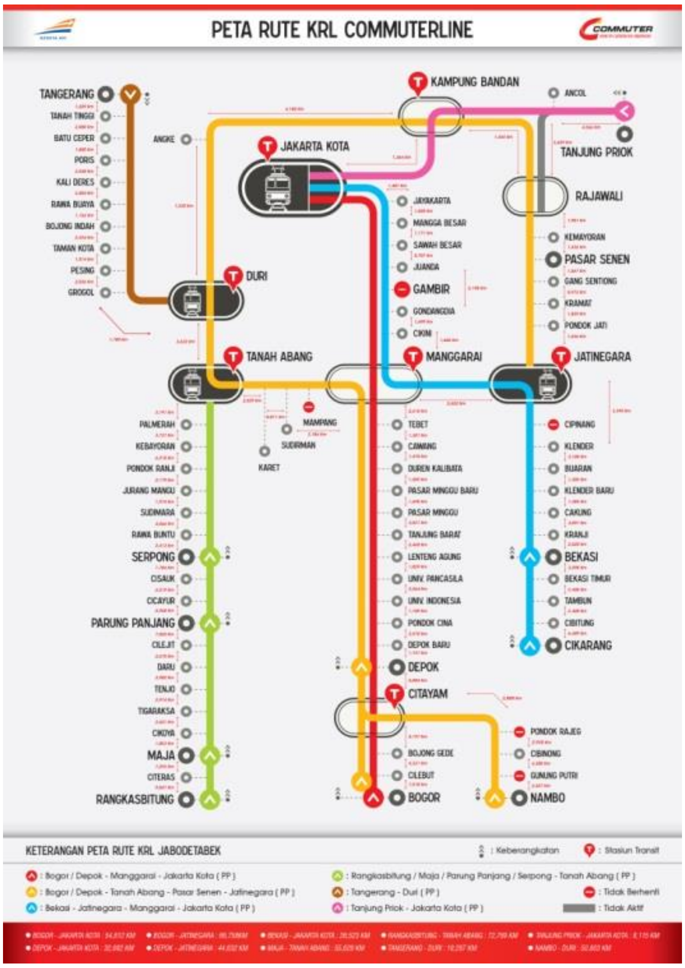
Barisan $x_n := \frac{1}{n}$ merupakan barisan terbatas karena terdapat batas atas bernilai 1 dan batas bawah bernilai 0. X_n pun monoton turun, karena:

$$x_1 = \frac{1}{1} > x_2 = \frac{1}{2} > \cdots > x_n = \frac{1}{n} > x_{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

Karena barisan x_n terbatas dan monoton, maka barisan x_n disebut konvergen.

E) KRL Bogor-Jakarta Kota

Kereta Rangkaian Listrik merupakan layanan transportasi umum dengan rute khusus yang dioperasikan oleh PT Kereta Commuter Indonesia, anak perusahaan dari PT Kereta Api Indonesia(PT KAI). Berikut rute yang dilewati oleh KRL:



Gambar 1. Rute KRL
Sumber: Wikipedia [4]

Pada bagian ini, penulis akan berfokus pada rute KRL Bogor-Jakarta Kota untuk menunjukan bahwa KRL merupakan layanan transportasi yang konvergen.

F) KRL Bogor-Jakarta Kota sebagai Barisan Terbatas

Mengacu pada definisi barisan terbatas yang menyatakan bahwa: x_n *dikatakan terbatas jika dan hanya jika terdapat* $M > 0$ *sedemikian sehingga* $|x_n| \leq M$*, untuk setiap* $n \in N$.
Tanpa kita sadari konsep pada jalur KRLBogor-Jakarta kota dapat dianalogikan sebagai barisan terbatas. Kita tahu bahwa setiap KRL memiliki jalur tersendiri, semisal KRL Bogor-Jakarta Kota yang memiliki rute yang berawal dari stasiun Bogor dan berakhir di stasiun Jakarta Kota.
Jika kita misalkan (x_n):= barisan stasiun yang dilalui KRL Bogor-Jakarta Kota, dengan x_1:= stasiun Bogor. Maka, (x_n) dikatakan terbatas karena terdapat M (misalkan M:= stasiun Tanjung Priuk) dimana jarak stasiun Tanjung Priuk lebih jauh dari barisan stasiun-stasiun pada jalur Bogor-Jakarta Kota, atau dapat kita tuliskan $|x_n| \leq M$. Jadi, (x_n) merupakan barisan terbatas dengan batas bawahnya adalah stasiun Bogor, dan batas atasnya adalah stasiun Jakarta Kota.

G) KRL Bogor-Jakarta Kota sebagai Barisan Monoton

Mengacu pada definisi barisan monoton, suatu barisan dikatakan monoton naik apabila barisan tersebut monoton naik atau monoton turun. Suatu barisan dikatakan monoton naik apabila: $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1}$, dan dikatakan monoton turun apabila: $x_1 > x_2 > \cdots > x_n > x_{n+1}$.
Konsep barisan monoton ini dapat kita jumpai pada KRL, khususnya KRL Bogor-Jakarta Kota. Pada kasus KRL Bogor-Jakarta Kota, KRL akan melaju dari titik keberangkatan stasiun Bogor kemudian dilanjukan ke stasiun Cilebut, Bojong Gede, dan seterusnya (lihat pada gambar 1) hingga stasiun terakhir yaitu stasiun Jakarta Kota. Kita tahu bahwa KRL selalu melaju ke arah stasiun yang jaraknya lebih jauh, dan setelah melaju tidak mungkin mundur ke stasiun sebelumnya. Sebagai permisalan, jika KRL Bogor-Jakarta Kota telah sampai pada stasiun Manggarai maka pastilah perjalanan akan berlanjut ke stasiun berikutnya (stasiun Cikini), KRL tidak mungkin bergerak kembali ke stasiun sebelumnya (stasiun Tebet). Hal terebut layaknya konsep barisan monoton naik, jika kita misalkan x_1:= Stasiun Bogor, x_2:= Stasiun Cilebut, x_3:= Stasiun Bojong Gede, dan seterusnya. Maka stasiun yang dilalui KRL Bogor-Jakarta Kota berdasarkan jaraknya dapat kita tuliskan sebagai berikut:

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1}$$

dengan barisan x_n didefinisikan sebagai barisan jarak tempuh stasiun sepanjang Bogor-Jakarta Kota. Jadi, dapat kita simpulkan bahwa barisan stasiun yang dilewati KRL Bogor-Jakarta Kota monoton naik.

H) KRL Bogor-Jakarta Kota sebagai Barisan yang Konvergen ke Jakarta Kota

Mengacu pada teorema yang menyatakan bahwa *Suatu barisan monoton dikatakan barisan konvergen jika dan hanya jika barisan tersebut juga terbatas. Artinya, jika* $X=(x_n)$ *merupakan barisan monoton naik yang terbatas, maka:* $\lim(x_n) = \sup\{x_n : n \in N\}$.
Pada pembahasan sebelumnya telah dipaparkan KRL Bogor-Jakarta Kota yang dianalogikan sebagai barisan terbatas dan monoton naik, maka dapat kita simpulkan bahwa x_n konvergen ke suatu supremum x_n.
Pada gambar 1 dapat kita lihat bahwa jalur KRL Bogor-Jakarta Kota memiliki batas atas pada stasiun Jakarta Kota, selain itu stasiun Jakarta Kota juga merupakan batas atas terkecil dari rangkaian stasiun pada jalur KRL Bogor-Jakarta kota. Jika terdapat x_* , dimana x_*:=stasiun Jakarta Kota, maka dapat kita tuliskan:

$$x_* = \sup\{x_n : n \in N\}$$

karena $\lim(x_n) = \sup\{x_n : n \in N\}$, artinya:

$$\lim(x_n) = x_*$$

Jadi, dapat kita simpulkan bahwa x_n konvergen ke x_n yang artinya barisan stasiun yang dilewati KRL Bogor-Jakarta Kota konvergen ke Jakarta Kota.

4. Kesimpulan

Mengacu teorema yang menyatakan bahwa "suatu barisan monoton dikatakan barisan konvergen jika dan hanya jika barisan terbatas", didapatkan hasil analisis bahwa rute

KRL Bogor-Jakarta kota merupakan barisan konvergen. Konteks KRL rute Bogor-Jakarta kota dapat dianalogikan sebagai barisan konvergen, karena KRL melaju dari stasiun ke stasiun lainya atau dapat dikatakan sebagai barisan monoton naik, dan merupakan barisan terbatas dengan stasiun Bogor sebagai batas bawah dan stasiun Jakarta kota sebagai batas atas.

DAFTAR PUSTAKA

Ani A., M Maulana, dan C Sunaengsih. (2017). *Pengaruh Pendekatan Kontekstual Berbasis Kecerdasan Visual-Spasial terhadap Kemampuan Pemahaman Matematis Siswa Sekolah Dasar*. Jurnal : UPI.

Bartle, R.G. & Donald, R. (2000). *Introduction to Real Anlysis (3rd ed)*. New York, United State of America.

Darmadi. (2015). Profil Aktivitas Mahasiswi Calon Guru Matematika dalam Memahami Definisi Formal Barisan Konvergen dengan Visualisasi. *Math Didactic: Jurnal Pendidikan Matematika*, *1*(3), 140-163.

Gunawan, Hendra. (2016). *Pengantar Analisis Real*. Bandung: Institut Teknologi Bandung.

Ninda Andani, (2018) *Pengaruh Pendekatan Contextual Teaching And Learning Terhadap Motivasi Belajar Dan Hasil Belajar Peserta Didik Kelas Iv Sd Al Irsyad Al Islamiyah Tulungagung.* Skripsi . Iain-Tulungagung.

Rute KRL 2018. (2017). Wikipedia. Diakses pada 03 Mei 2018 pukul 10.00, dari https://id.wikipedia.org/w/index.php?title=Berkas:Peta-Rute-KRL-A4-09-02-2017-Dengan-Jarak-.jpg&filetimestamp=20170922103039&.